Formulación Hamiltoniana de la Mecánica Clásica con Cálculo Geométrico

Dr. Arnulfo Castellanos Moreno
Jesús Rolando Mendivil Lizárraga
César Augusto Romero Ramos
Departamento de Física, Universidad de Sonora

Resumen

En este trabajo se expone una experiencia didáctica en la que, después de estudiar Álgebra Geométrica (AG) y Cálculo Geométrico (CG) en un curso semestral, hemos estudiado una construcción de la mecánica hamiltoniana a partir del CG. Este enfoque matemático permite abordar rápidamente el estudio de la formulación simpléctica que se aborda en textos avanzados de mecánica clásica. También sintetiza en un solo formalismo el cálculo vectorial, el análisis complejo y el álgebra lineal. En la formulación general que hacemos de la mecánica de Hamilton se utiliza el concepto de derivada geométrica y recurrimos a dos ejemplos simples para acercar esta temática a estudiantes de licenciatura en física.

Desarrollo

Para un sistema descrito por coordenadas $\{q_1, ..., q_n\}$ y momentos $\{p_1, ..., p_n\}$ se define el espacio de configuraciones como el espacio vectorial $\Re^n$ caracterizado por la base ortonormal $\{\ \hat{e}_k\ \}$

$$\hat{e}_j \cdot \hat{e}_k = \frac{1}{2}(\hat{e}_j\hat{e}_k + \hat{e}_k\hat{e}_j) = \delta_{jk} \tag{1}$$

El estado del sistema se caracteriza por el par de vectores

$$\vec{q} = \sum_k q_k\hat{e}_k \qquad , \qquad \vec{p} = \sum_k p_k\hat{e}_k \tag{2}$$

Los vectores en el espacio de configuraciones generan el álgebra geométrica $\mathcal{R}_n = G(\Re^n)$ con producto geométrico

$$\vec{q}\,\vec{p} = \vec{q}\cdot\vec{p} + \vec{q}\wedge\vec{p} \tag{3}$$

Se introduce la derivada vectorial especificando su relación con las coordenadas

$$\partial_{\vec{q}} = \sum_k \hat{e}_k \frac{\partial}{\partial q_k} \tag{4}$$

De (2)

$$q_k = q_k(\vec{q}) = \vec{q}\cdot\hat{e}_k \tag{5}$$

y así los vectores $\hat{e}_k$ están dados como

$$\hat{e}_k = \partial_{\vec{q}}\, q_k \tag{6}$$

Para la Hamiltoniana $\mathcal{H}(\vec{q},\vec{p})$, las ecuaciones de Hamilton son

$$\dot{\vec{q}} = \partial_{\vec{p}}\,\mathcal{H} \tag{7}$$

$$\dot{\vec{p}} = -\partial_{\vec{p}}\,\mathcal{H} \tag{8}$$

Como $\vec{p}$ y $\vec{q}$ son variables independientes, podemos reducir este par de ecuaciones a una sola en un espacio de dimensión mayor. Esto se puede conseguir con CG. Con ese fin se define el espacio de momentos $\tilde{\Re}^n$, con base $\{\ \tilde{e}_k\ \}$, con

$$\tilde{e}_j \cdot \tilde{e}_k = \frac{1}{2}(\tilde{e}_j\tilde{e}_k + \tilde{e}_k\tilde{e}_j) = \delta_{jk} \tag{9}$$

y así el momento del sistema se puede expresar como

$$\tilde{p} = \sum_k p_k\tilde{e}_k \tag{10}$$

Ahora se define el espacio fase como la suma directa

$$\Re^{2n} = \Re^n \oplus \tilde{\Re}^n \tag{11}$$

Esto genera el álgebra geométrica del espacio fase $\mathcal{R}_{2n} = G(\Re^{2n})$, que queda completamente definido por (1), (9) y la relación de ortogonalidad

$$\hat{e}_j \cdot \tilde{e}_k = \frac{1}{2}(\hat{e}_j\tilde{e}_k + \tilde{e}_k\hat{e}_j) = 0 \tag{12}$$

La estructura simpléctica del espacio fase se describe introduciendo el bivector simpléctico

$$\bar{J} = \sum_k \bar{J}_k \tag{13}$$

con

$$\bar{J}_k = \hat{e}_k\tilde{e}_k = \hat{e}_k \wedge \tilde{e}_k \tag{14}$$

El bivector $\bar{J}$ determina un emparejamiento único

$$\tilde{e}_k = -\bar{J}_k\hat{e}_k \tag{15}$$

$$\hat{e}_k = -\tilde{e}_k\bar{J}_k \tag{16}$$

Además, los $\bar{J}_k$ satisfacen

$$\bar{J}_k^2 = -1 \tag{17}$$

funcionando como unidades imaginarias que relacionan q_k con p_k. Así, el bivector $\bar{J}$ determina una única estructura compleja del espacio fase.

El bivector $\bar{J}$ determina una transformación lineal antisimétrica $\underline{J}$ que mapea cada vector $\vec{x}$ en el espacio fase a

$$\tilde{x} = \underline{J}\vec{x} = \vec{x}\cdot\bar{J}, \tag{18}$$

que esto a su vez define una forma bilineal antisimétrica

$$\tilde{x}\cdot\vec{y} = -\tilde{y}\cdot\vec{x}, \tag{19}$$

La forma bilineal es no degenerada si y solo si $\tilde{x}$ es no nulo cuando $\vec{x}$ es no nulo.

Ahora, para definir la mecánica Hamiltoniana en el espacio fase, se requiere de un solo punto $\vec{x}$ definido por

$$\vec{x} = \tilde{q} + \vec{p} = \vec{p} + \vec{q}\cdot\bar{J}, \tag{20}$$

La derivada respecto a un punto del espacio fase está dada por

$$\partial \equiv \partial_{\vec{x}} = \partial_{\tilde{q}} + \partial_{\vec{p}} = \tilde{\partial}_{\vec{p}} \tag{21}$$

y se tiene

$$\tilde{\partial} = \tilde{\partial}_{\vec{x}} = -\bar{J}\cdot\partial_{\vec{x}} = -\partial_{\vec{q}} + \tilde{\partial}_{\vec{p}} \tag{22}$$

La hamiltoniana del sistema es una función escalar del espacio fase

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}(\vec{x}) = \mathcal{H}(\vec{q},\vec{p}) \tag{23}$$

Así, la ecuación de Hamilton para una trayectoria $\vec{x} = \vec{x}(t)$ del sistema asume la forma

$$\dot{\vec{x}} = \tilde{\partial}\mathcal{H} \tag{24}$$

La trancripción de la teoría entera de sistemas Hamiltonianos a esta nueva formulación invariante es directa; por ejemplo, para cualquier función $\mathcal{G} = \mathcal{G}(\vec{x})$, los corchetes de Poisson se definen como

$$[\mathcal{H}\ ,\ \mathcal{G}] = (\tilde{\partial}\mathcal{H})\cdot\partial\mathcal{G} = -\,[\mathcal{G}\ ,\ \mathcal{H}]\,, \tag{25}$$

Su equivalente en la forma convencional con cordenadas es

$$[\mathcal{H}\ ,\ \mathcal{G}] = (\tilde{\partial}_{\vec{p}}\,\mathcal{H} - \partial_{\vec{q}}\,\mathcal{H})\cdot(\partial_{\vec{p}} + \tilde{\partial}_{\vec{q}})\mathcal{G}$$

$$= (\partial_{\vec{p}}\,\mathcal{H})\cdot(\partial_{\vec{q}}\,\mathcal{G}) - (\partial_{\vec{q}}\,\mathcal{H})\cdot(\partial_{\vec{p}}\,\mathcal{G})$$

$$= \sum_k \left[\left(\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial P_k}\right)\left(\frac{\partial\mathcal{G}}{\partial q_k}\right) - \left(\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial q_k}\right)\left(\frac{\partial\mathcal{G}}{\partial p_k}\right)\right] \tag{26}$$

La definición (25) no requiere que $\mathcal{G}$ sea escalar; puede ser aplicada a cualquier función multivectorial $\mathcal{M} = \mathcal{M}(\vec{x})$, que describa una propiedad observable del sistema. De esto se sigue que la ecuación de evolución de la observable sea

$$\dot{\mathcal{M}} = \dot{\vec{x}}\cdot\partial\mathcal{M} = (\tilde{\partial}\mathcal{H})\cdot\partial\mathcal{M} = [\mathcal{H}\ ,\ \mathcal{M}] \tag{27}$$

Para $\mathcal{M} = \vec{x}$ se tiene

$$[\mathcal{H}\ ,\ \vec{x}] = (\tilde{\partial}\mathcal{H})\cdot\partial\vec{x} = \tilde{\partial}\mathcal{H} \tag{28}$$

así la ecuación de Hamilton (24) se puede expresar en la forma

$$\dot{\vec{x}} = [\mathcal{H}\ ,\ \vec{x}] \tag{29}$$

De acuerdo con (27), $\mathcal{M}$ es constante de movimiento si $[\mathcal{H}\ ,\ \mathcal{M}] = 0$. Se sigue que $\mathcal{H}$ es constante de movimiento, pues

$$[\mathcal{H}\ ,\ \mathcal{H}] = (\tilde{\partial}\mathcal{H})\cdot(\partial\mathcal{H}) = \bar{J}\cdot(\partial\mathcal{H}\wedge\partial\mathcal{H}) = 0 \tag{30}$$

Conclusión

El Álgebra Geométrica y el Cálculo Geométrico pueden ser estudiados en un curso semestral de nivel licenciatura, tal que, dependiendo del estado de desarrollo del estudiante, pueda acceder rápidamente a una formulación de la mecánica que suele ser reservada para estudiantes de postgrado.

Referencias

(1) Una descripción elemental del Álgebra Geométrica, que va de la mano del Álgebra Lineal se encuentra en: Alan Macdonald, Linear and Geometric Algebra. Edición de autor.

(2) Un texto sobre cálculo de varias variables y Cálculo Geométrico es: Alan Macdonald, Vector and Geometric Calculus. Edición de autor.

(3) Una formulación de la electrodinámica puede ser consultada en: Terje G. Vold, An introduction to geometric calculus and its application to electrodynamics, Am. J. Phys. 61, 505 (1993).

(4) El sólido rígido descrito mediante Álgebra Geométrica se encuentra en: Terje G. Vold, An introduction to geometric algebra with an application in rigid body mechanics, Am. J. Phys. 61, 491 (1993)

(5) El formalismo puede ser utilizado para el estudio de la mecánica cuántica, ver: G. Sobczyk, Geometry of spin 1/2 particles, Revista Mexicana de Física 61 (2015) 211223

(6) David Hestenes, Hamiltonian Mechanics with Geometric Calculus, In: Z. Oziewicz et al (eds.), Spinors, Twistors, Clifford Algebras and Quantum Deformations, Kluwer: Dordercht/Boston (1993), 203214.