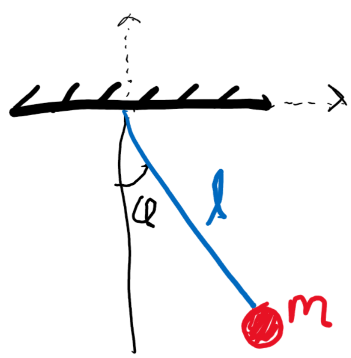
Péndulo Simple Plano

Por CR

Junio de 2020

1 Ecuación de Lagrange del Péndulo Simple Plano

El péndulo simple plano es un sistema físico que consiste de un cuerpo (en ocasiones denominado "lenteja") de masa m que pende de un hilo. El péndulo está siendo sometido solo a la acción de su propio peso. En el caso más simple, el péndulo solo tendrá movimiento en un plano. La cuerda o hilo es considerada de masa nula o despreciable.



De entrada podemos describir el movimiento del péndulo con las coordenadas x e y propias de un sistema cartesiano. Sin embargo, siempre que buscamos determinar las ecuaciones de Lagrange de un sistema físico, es muy importante determinar antes que nada las constricciones del sistema. Es decir, aquellas condiciones que limitan el movimiento del mismo. En este problema en particular existe una constricción, y es que si tenemos el origen del sistema en el extremo anclado de la cuerda, entonces la distancia de la lenteja al origen es fija, y es igual al largo l de la cuerda.

Esta constricción puede ser escrita como

$$x^2 + y^2 = l^2. \tag{1}$$

De entrada consideramos al sistema como describible por medio de dos coordenadas, x e y. Esto debido a que es un sistema físico con movimiento en dos dimensiones. Sin embargo, toda vez que el sistema está sometido a una constricción, entonces solo tiene un grado de libertad.

Siempre que querramos resolver este tipo de problemas, es importante tratar de identificar lo más pronto posible las coordenadas que más nos vayan a simplificar el procedimiento, y que a su vez en la mayoría de los casos, también serán las coordenadas con las cuales mejor se describe el comportamiento del sistema. En este caso, las coordenadas cartesianas dificultarían mucho el análisis, por lo cual abordaremos el problema utilizando coordenadas polares.

El único grado de libertad que tiene el sistema es el ángulo ϕ que describe la cuerda del péndulo con respecto a la vertical. Al solo tener el péndulo un grado de libertad, tendrá entonces también solo una ecuación de movimiento de Lagrange. Esa ecuación de movimiento describirá la evolución de la coordenada generalizada ϕ.

Las ecuaciones de transformación de coordenadas cartesianas a coordenadas polares son

$$x = rSen\phi, \tag{2}$$

$$y = rCos\phi. \tag{3}$$

dadas estas ecuaciones de transformación, podemos escribir la constricción como

$$r = l. \tag{4}$$

Como vemos, desde la expresión para la constricción ya se puede apreciar que el sistema de coordenadas polares nos permite describir el problema de forma más simple y natural.

Ahora, para poder escribir la ecuación de Lagrange de este sistema, primero tenemos que determinar la función Lagrangiana L. Recordemos que la función Lagrangiana se define como

$$L = T - V \tag{5}$$

donde T es la energía cinética y V es la energía potencial. La energía potencial del sistema es la energía potencial gravitacional, descrita como

$$V = mgy, \tag{6}$$

$$V = mglCos\phi. \tag{7}$$

La energía cinética del sistema es

$$T = \frac{1}{2}mv^2, \tag{8}$$

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2),$$

$$T=\frac{1}{2}m\left(\left(\frac{d}{dt}lCos\phi\right)^2+\left(\frac{d}{dt}lSen\phi\right)^2\right),$$

$$T=\frac{1}{2}m\left(l^2\left(-Sen(\phi)\dot{\phi}\right)^2+l^2\left(Cos(\phi)\dot{\phi}\right)^2\right),$$

$$T=\frac{1}{2}ml^2\dot{\phi}^2\left(Sen^2(\phi)+Cos^2(\phi)\right),$$

$$T=\frac{1}{2}ml^2\dot{\phi}^2. \tag{9}$$

La función lagrangiana es entonces

$$L=mglCos\phi-\frac{1}{2}ml^2\dot{\phi}^2. \tag{10}$$

Una vez teniendo la función lagrangiana, podemos calcular la ecuación de Lagrange

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\phi}}\right)-\frac{\partial L}{\partial\phi}=0, \tag{11}$$

$$\frac{d}{dt}\left(ml^2\dot{\phi}\right)-(-mglSen\phi)=0,$$

$$ml^2\ddot{\phi}+mglSen\phi=0, \tag{12}$$

o bien

$$\ddot{\phi}+\frac{g}{l}Sen\phi=0. \tag{13}$$

Esta es la ecuación de Lagrange del Péndulo simple plano. Para ángulos muy pequeños ($\phi << 90$), se puede aproximar el $Sen\phi$ por ϕ. Así, para ángulos pequeños, la ecuación del movimiento de Lagrange sería

$$\ddot{\phi}+\frac{g}{l}\phi=0, \tag{14}$$

que es la ecuación de movimiento del oscilador armónico simple. Así, la coordenada generalizada ϕ, es decir, el ángulo que forma el péndulo con la vertical, oscila como un oscilador armónico simple, siempre y cuando el rango del ángulo ϕ sea chico.

Es muy importante resaltar el hecho de que la frecuencia de oscilación

$$\omega=\sqrt{\frac{g}{l}}, \tag{15}$$

es independiente de la masa m de la lenteja. Es decir que el péndulo oscilaría con la misma frecuencia si el péndulo fuera muy ligero que si fuera muy pesado. Este hecho es asombroso. El único parámetro del que depende la frecuencia del péndulo es del largo l de la cuerda (experimentalmente no se tiene control sobre g). Así, si queremos construir un péndulo con una frecuencia de oscilación dada, bastará con que lo hagamos con una cuerda de largo $l = g/\omega^2$. Además, podemos observar también que la frecuencia es independiente de la amplitud de la oscilación; aunque esto último como reservas, ya que recordemos que la ecuación de movimiento incluye una consideración para oscilaciones pequeñas.

La solución a la ecuación diferencial del movimiento (14) es

$$\phi(t) = \Phi Sen(\omega t + \theta), \tag{16}$$

donde θ es la fase de la oscilación, y Φ es la amplitud (la amplitud debe ser chica para que la ecuación (14) sea válida). Así, la ecuación (16) describe de forma completa la evolución temporal de la coordenada generalizada ϕ. Para conocer la velocidad generalizada $\dot{\phi}$ como función del tiempo, basta con derivar la ecuación (16) respecto al tiempo,

$$\dot{\phi}(t) = \omega \Phi Cos(\omega t + \theta), \tag{17}$$